

## 21 Der Geschenkequader

Autoren: Ulrich Reitebuch (FU Berlin), Martin Skrodzki (FU Berlin)  
 Projekt: GV-AP16 – Computational and structural aspects of point set surfaces

### 21.1 Aufgabe

Die Wichtel wollen einen großen Haufen mit 512 Geschenken möglichst platzsparend lagern. Alle diese Geschenke

$$G_i^{(0)} = (x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)}), \quad i = 1, \dots, 512,$$

sind quaderförmig mit den jeweiligen Breiten  $x_i$ , Tiefen  $y_i$  und Höhen  $z_i$  und haben eine eindeutige Orientierung, da jedes eine Beschriftung mit „oben“ und eine weitere mit „vorne“ besitzt.

Die Wichtel stellen nun fest, dass sich die Geschenke immer zu Paaren

$$(G_{j_1}^{(0)}, G_{j_2}^{(0)}), \quad j_1, j_2 \in \{1, \dots, 512\}, \quad j_1 \neq j_2,$$

zusammenschieben lassen, die yz-kompatibel sind. Das heißt, dass sowohl die Tiefen als auch die Höhen übereinstimmen:

$$y_{j_1}^{(0)} = y_{j_2}^{(0)} \quad \text{und} \quad z_{j_1}^{(0)} = z_{j_2}^{(0)}.$$

Somit bilden die zwei Geschenke  $G_{j_1}^{(0)}$  und  $G_{j_2}^{(0)}$  eines Paares gemeinsam einen neuen Quader  $G_j^{(1)}$  mit

- Breite  $x_j^{(1)} = x_{j_1}^{(0)} + x_{j_2}^{(0)}$ ,
- Tiefe  $y_j^{(1)} = y_{j_1}^{(0)} = y_{j_2}^{(0)}$  und
- Höhe  $z_j^{(1)} = z_{j_1}^{(0)} = z_{j_2}^{(0)}$ ,

siehe Abbildung 20. Außerdem taucht jedes der 512 Geschenke  $G_i^{(0)}$  in genau einem solchen Paar genau einmal auf. Die Wichtel können also jeweils zwei Geschenke zusammenschieben und erhalten dann 256 neue Quader  $G_j^{(1)}$ ,  $j = 1, \dots, 256$ , mit den jeweiligen Breiten  $x_j^{(1)}$ , Tiefen  $y_j^{(1)}$  und Höhen  $z_j^{(1)}$ .

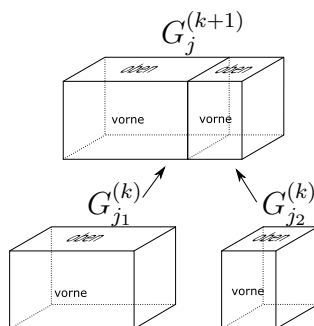


Abbildung 20: Zwei Quader mit gleicher Tiefe und Höhe ergeben einen neuen Quader.

Die Wichtel probieren weiter und stellen fest, dass bei diesen neuen 256 Quadern wieder die Eigenschaft erfüllt ist, dass sie sich paarweise zusammenschieben lassen und 128 neue Quader ergeben, wobei diesmal zwei Quader eines Paares  $xz$ -kompatibel sind, also jeweils Breite und Höhe innerhalb eines Paares passen. Im dritten Schritt erzeugen sie 64 Quader durch  $xy$ -kompatibles Zusammenschieben, es passen Breite und Tiefe. So schieben sie noch sechs weitere Male, wobei die Boxen-Paare

- im insgesamt 1., 4. und 7. Schiebevorgang  $yz$ -kompatibel,
- im 2., 5. und 8. Vorgang  $xz$ -kompatibel und
- im 3., 6. und 9. Vorgang  $xy$ -kompatibel sind.

Am Ende erhalten sie einen großen Quader  $G^{(9)}$ , der alle Geschenke  $G_i^{(0)}$  beinhaltet. Dieser lässt sich sehr gut lagern und zufrieden machen die Wichtel eine Pause.

Zum einfachen Zuschnitt von Geschenkpapier nutzen die Wichtel einen Laser-gestützten-Schnitt-Werkstoff-Trenner, kurz Laser-Sch.Wer.T. Einer der Wichtel will nun gerade mit dem Laser-Sch.Wer.T. Verpackungsmaterial zerschneiden, als er stolpert und einen ebenen, jedoch nicht achsenparallelen Schnitt durch den zusammengestellten Geschenkequader  $G^{(9)}$  macht, welcher diesen Quader in zwei jeweils nicht-leere Teile teilt.

Die Aufregung ist groß: Überall liegen kaputte Geschenke in der Wichtelwerkstatt. Aber die Wichtel können nur ahnen, wie viele der 512 Geschenke genau vom Laser-Sch.Wer.T. zerstört wurden, da der Büro-Wichtel leider etwas

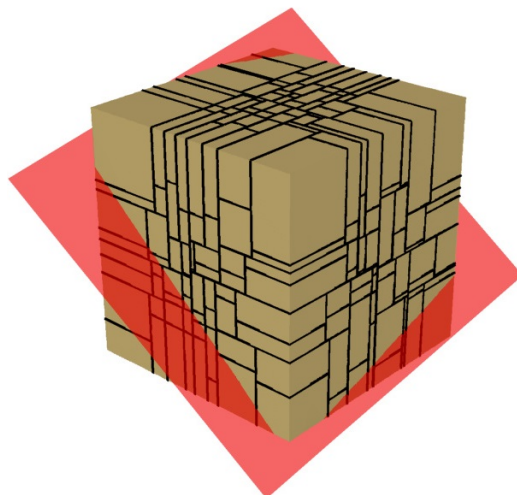


Abbildung 21: Beispiel für einen ebenen, nicht-achsenparallelen Schnitt durch den großen Quader  $G^{(9)}$ .

übereifrig war und die Unterlagen mit den genauen Maßen  $(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)})$ ,  $i = 1, \dots, 512$ , geschreddert hat. Die Wichtel erinnern sich nur noch an die oben beschriebene Eigenschaft des Zusammenschiebens der 512 Geschenkpakete.

Wie viele der 512 Geschenke  $G_i^{(0)}$  wurden denn maximal von dem Schnitt in jeweils zwei nicht-leere Teile geteilt?



Illustration: Sonja Rörig

### Antwortmöglichkeiten:

1. 64
2. 96
3. 120
4. 133
5. 142
6. 170
7. 176
8. 384
9. 448
10. 512

**Projektbezug:**

Die Partitionierung des Raumes, wie sie hier durch die Geschenke  $G_i^{(0)}$  vorgenommen wird, spielt eine wichtige Rolle bei Abfragen von Punkten. Platziert man zunächst Datenpunkte im Raum und partitioniert diesen gemäß der angegebenen Vorschrift des „Zusammenschiebens“, kann man effizient folgende Fragen beantworten: Welche Datenpunkte liegen in einem bestimmten Bereich und welcher der Datenpunkte liegt am nächsten zu einem gegebenen Abfragepunkt? Je größer die Menge an Datenpunkten im Raum wird, desto wichtiger sind solche effizienten Strukturen als Grundlage jeglicher Prozesse auf diesen Punkten. Im Projekt *Computational and structural aspects of point set surfaces* werden vor allem Datenpunkte betrachtet, die durch 3D-Scan-Technologien von realen Geometrien gewonnen werden und die diese Geometrien digital abbilden.

## 21.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir zeigen, dass schlimmstenfalls alle 512 Geschenke geteilt werden, indem wir entsprechende Geschenke  $G_i^{(0)}$  konstruieren: Hierfür nehmen wir zunächst einen beliebigen Quader  $G^{(9)}$  und eine beliebige nicht-achsenparallele Schnittebene  $H$  an, welche  $G^{(9)}$  in zwei nicht-leere Teile teilt.

Im letzten Schritt der Wichtel war das einzige verbliebene Paar  $xy$ -kompatibel. Wir müssen somit  $G^{(9)}$  in zwei Quader  $G_1^{(8)}$  und  $G_2^{(8)}$  teilen, die gleiche Breite und Tiefe haben. Hierfür betrachten wir, auf welcher Höhe genau die Schnittebene  $H$  den Quader  $G^{(9)}$  schneidet:

$$z_{\min} := \min\{z \in \mathbb{R} \mid \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in H \cap G^{(9)}\},$$

$$z_{\max} := \max\{z \in \mathbb{R} \mid \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in H \cap G^{(9)}\}.$$

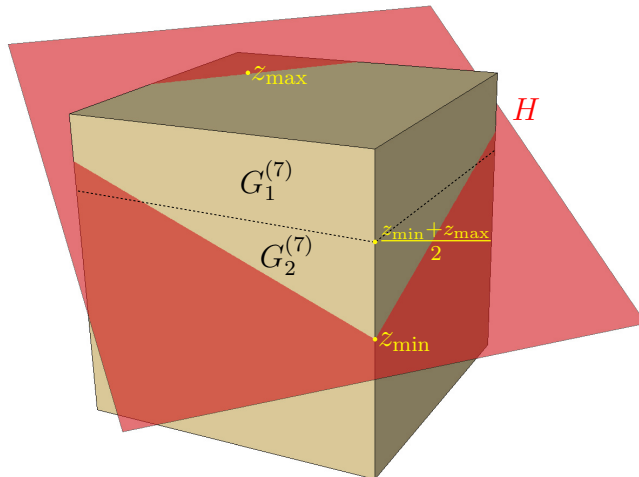


Abbildung 22: Das gezielte Zerschneiden des Quaders  $G^{(9)}$  in die zwei Quader  $G_1^{(8)}$  und  $G_2^{(8)}$ .

Somit bezeichnen  $z_{\min}$  und  $z_{\max}$  die kleinste und größte Höhe, auf welcher  $G^{(9)}$  von  $H$  geschnitten wird. Da  $H$  nicht achsenparallel ist, gilt  $z_{\max} > z_{\min}$ .

Wir teilen nun  $G^{(9)}$  genau zwischen diesen Werten auf Höhe

$$\frac{z_{\max} + z_{\min}}{2}$$

und erhalten somit die zwei Quader  $G_1^{(8)}$  und  $G_2^{(8)}$ . Beide passen in Bezug auf Breite und Tiefe zusammen und werden nach Konstruktion von  $H$  in jeweils zwei nicht-leere Teile geteilt, siehe Abbildung 22.

Wir wiederholen diese Konstruktion nun jeweils rekursiv für die beiden Quader  $G_1^{(8)}$  und  $G_2^{(8)}$ , wobei wir jedoch  $xz$ -kompatible Paare erzeugen müssen, weshalb der kleinste und größte Schnittwert  $-y_{\min k}$  und  $y_{\max k}$ ,  $k = 1, 2$  – auf der Dimension „Tiefe“ gesucht wird und entsprechend auch bei der entsprechenden  $y$ -Koordinate  $\frac{y_{\min k} + y_{\max k}}{2}$ ,  $k = 1, 2$  geschnitten wird. Wir erhalten vier Quader  $G_j^{(7)}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , die wiederum mit entsprechender Kompatibilität rekursiv zerlegt werden, bis wir schließlich 512 Quader  $G_i^{(0)}$  erzeugt haben, die alle nach Konstruktion von  $H$  in jeweils zwei nicht-leere Teile geteilt werden. Damit haben wir ein Beispiel konstruiert, welches die in der Aufgabe genannten Bedingungen erfüllt, bei dem jedoch alle 512 Quader geschnitten werden.