21 Geschenkesortierungen

Autoren: Ulrich Reitebuch (FU Berlin), Martin Skrodzki (FU Berlin)
Projekt: GV-AP16 - *Computational and structural aspects of point set surfaces*

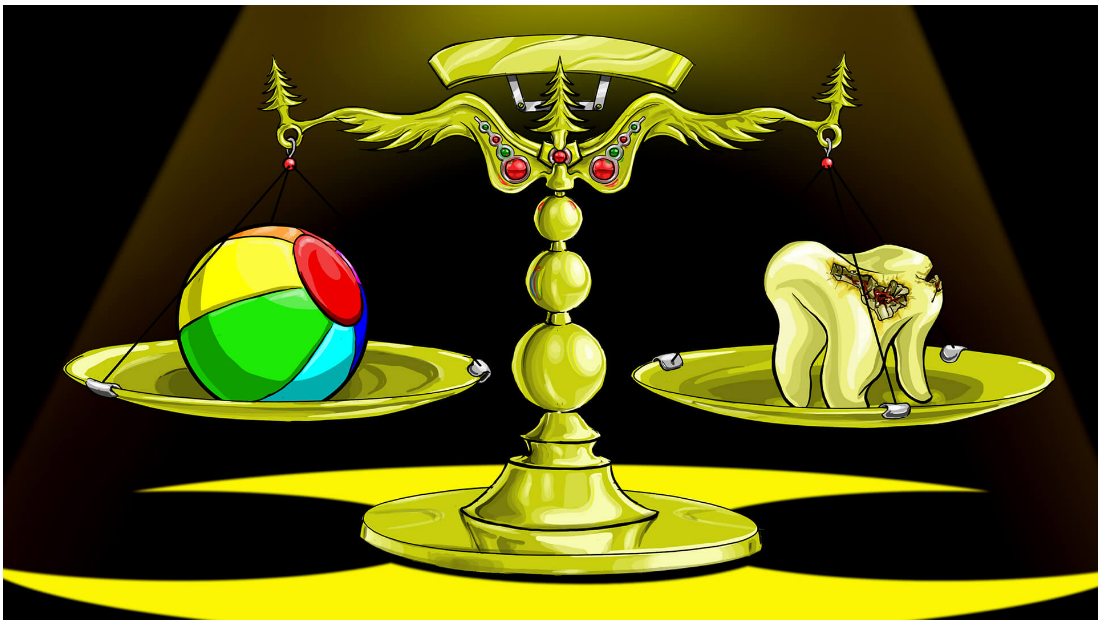
21.1 Aufgabe

Bisher haben die Wichtel des Weihnachtsdorfs die Geschenkpakete immer danach sortiert, wie viele Spielsachen sich in den Paketen befinden. Nach einigen Eingaben der weltweiten Zahnarzt-Vereinigung sollen die Wichtel aber auch einbeziehen, wie viele Süßigkeiten in jedem Paket sind. Jedes Paket P bekommt nun also eine Spiel-Bewertung S_P und eine Zucker-Bewertung Z_P. Die Bewertungen sind für je zwei Pakete verschieden. Nun wollen die Wichtel die Pakete stapeln und haben sich für die bessere Übersicht zwei Regeln überlegt:

- Für zwei Pakete P und Q, die nebeneinander stehen, soll gelten, dass P links von Q steht genau dann, wenn $S_P < S_Q$.
- Für zwei Pakete P und Q, die übereinander stehen, soll gelten, dass P unter Q steht genau dann, wenn $Z_P < Z_Q$.

Eine erste Lieferung von neun würfelförmigen Paketen trifft ein, sie sollen in drei übereinander stehende Reihen mit je drei Paketen sortiert werden . Die Pakete sind für die Kinder so bestückt, dass weniger Spielzeug durch mehr Zuckerzeug ausgeglichen wird. Die Bewertungen (S_P,Z_P) sind: (1,9),(2,8),(3,7), . . . ,(9,1).

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Pakete als 3×3-Stapel abzulegen, sodass beide Stapelregeln erfüllt sind? (Hinweis: Die Frage, ob der Stapel von beiden Seiten betrachtet werden kann, verbietet sich dadurch, dass *links* nur von einer Seite aus eindeutig definiert ist.)



Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 9
5. 11
6. 12
7. 13
8. 16

9. 21
10. 42

Projektbezug:

Die Frage taucht in Bezug auf die kombinatorische Ordnung von geometrischen Punktwolken auf. Will man n^2 Punkte $(x_1,y_1),\dots,(x_{n^2},y_{n^2})$, $n \in \mathbb{N}$, in einem $n \times n$ Gitter so anordnen, dass die Reihen von links nach rechts aufsteigende x-Koordinate, die Spalten von unten nach oben aufsteigende y-Koordinate aufweisen, so gibt es für gegebenes n nur endlich viele kombinatorische Möglichkeiten, das Gitter zu füllen – unabhängig von den konkreten Punktkoordinaten. Das Gitter findet Anwendung in der Bestimmung von Nachbarschaften. Dies ist zum Beispiel in biologischen Zellsimulationen, physikalischen Partikelsimulationen, oder bei der Verarbeitung großer Datenmengen aus 3D-Scannern von Bedeutung.

21.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Die richtige Antwort ist: 42. Um diese Zahl zu ermitteln, übertragen wir das Problem zunächst. Angenommen, wir haben eine Sortierung der Pakete gefunden, die beide Regeln erfüllt (s. Abbildung 11 links). Nun ändern wir jede Bewertung (S,Z) zu $(S,10-Z)$ (s. Abbildung 11 mittig). Damit bekommt jedes Paket P eine Bewertung (S,S). Allerdings stimmt die Sortierung nun nicht mehr, dafür müssen wir die oberste und unterste Reihe austauschen (s. Abbildung 11 rechts). Mit dieser Umformung gilt, dass sich jede Sortierung der gegebenen Bewertungen in eine Sortierung der Bewertungen (1,1), (2,2), ..., (9,9) umwandeln lässt. Das gilt auch umgekehrt. Es gibt also eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen - sie müssen gleich groß sein. Wenn wir wissen, wie viele Sortierungen es für die Bewertungen der Form (S,S) gibt, kennen wir sie auch für $(S,10-S)$, also unsere ursprünglichen Bewertungen.

(1,9)	(2,8)	(7,3)
(3,7)	(5,5)	(8,2)
(4,6)	(6,4)	(9,1)

(1,1)	(2,2)	(7,7)
(3,3)	(5,5)	(8,8)
(4,4)	(6,6)	(9,9)

(4,4)	(6,6)	(9,9)
(3,3)	(5,5)	(8,8)
(1,1)	(2,2)	(7,7)

Abbildung 11: Links eine Sortierung der Pakete mit ihren ursprünglichen Bewertungen, mittig eine Änderung der Bewertung und rechts eine entsprechende korrekte Sortierung mit neuen Bewertungen.

Wir wissen jetzt, dass $S_P = Z_P$ für alle Pakete P. Außerdem $S_P \neq S_Q$ für zwei Pakete P,Q. Da es uns nur auf die Sortierung ankommt, setzen wir für die neun Pakete $S_{P_1} = 1$, $S_{P_2} = 2$, ..., $S_{P_9} = 9$. Die Frage ist nun, wie die Zahlen von 1 bis 9 in ein 3×3 Gitter geschrieben werden können, sodass die Zeilen von links nach rechts und die Spalten von unten nach oben aufsteigend geordnet sind. Hier ist die Gesamtzahl von 9 Paketen in (3,3,3) partitioniert.
Allgemeiner kann man für eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_i > \lambda_j$ für $i > j$ betrachten. Das Gitter mit λ_i Zellen in der i-ten Zeile heißt dann Ferrers Diagram (s. Abbildung 12 links). Die Anzahl von Möglichkeiten,

dieses Gitter mit den Zahlen 1 bis N zu füllen, sodass jede Zeile von links nach rechts und jede Spalte von unten nach oben aufsteigend sortiert ist, ist durch die Hook-Length Formel gegeben:

$$\frac{N!}{\prod h_\lambda(i,j)},$$

wobei für jede Zelle (i,j) im Gitter der Hook $H_\lambda(i,j)$ die Mengen an Zellen (a,b) ist, sodass $a = i$ und $b \geq j$ oder $a \geq i$ und $b = j$. Die Hook-Length $h_\lambda(i,j)$ ist die Anzahl von Zellen im Hook $H_\lambda(i,j)$ (s. Abbildung 12 rechts).
Im hier betrachteten speziellen Fall $N = 9$ und $\lambda = (3,3,3)$ ergibt sich für $h_\lambda(i,j) = (3 - i) + (3 - j) + 1$ und damit als mögliche Anzahl von Sortierungen genau 42.

$$\frac{9!}{\prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{3} ((3-i) + (3-j) + 1))} = 42$$

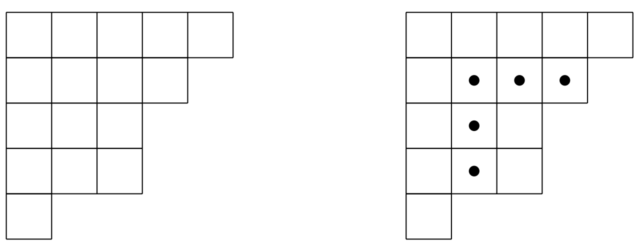


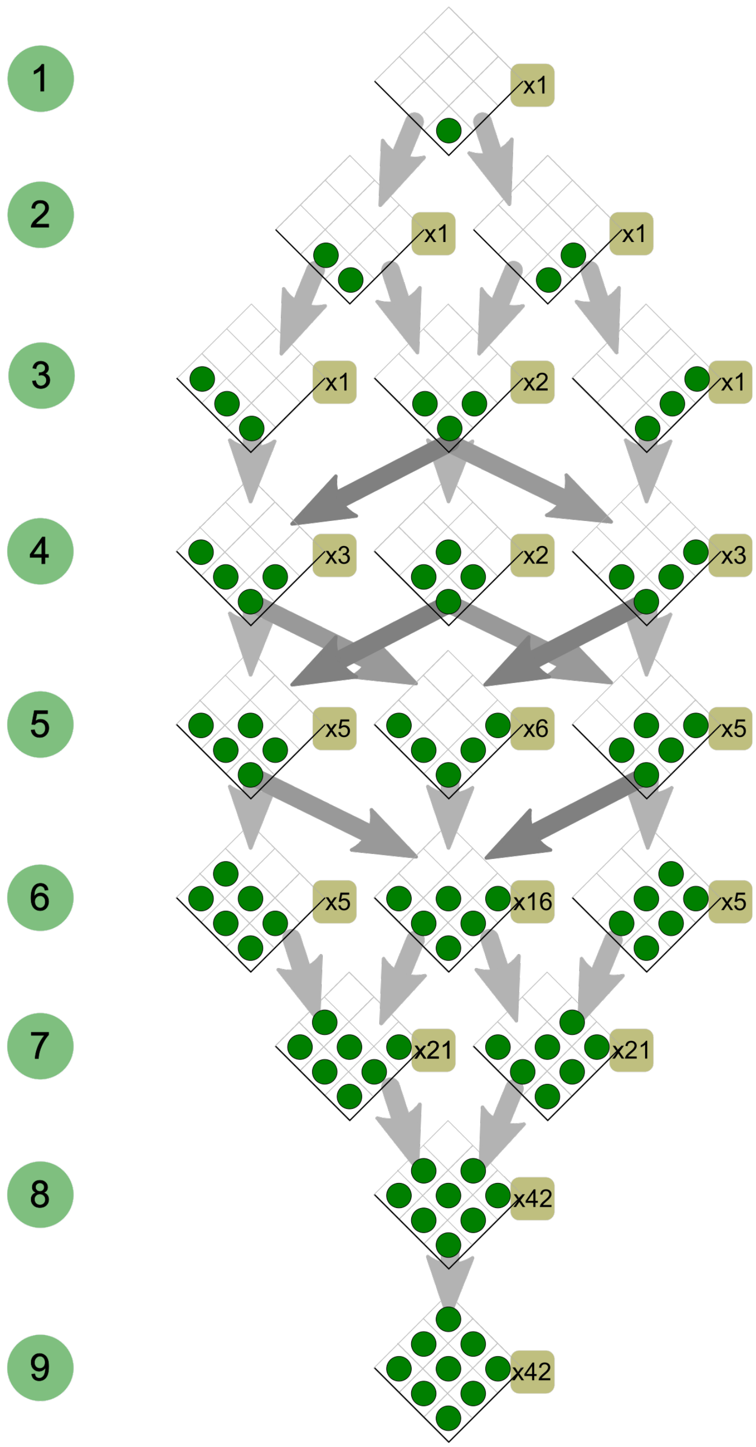
Abbildung 12: Links ein Ferrers Diagramm für die Partition $\lambda = (5,4,3,3,1)$ von $N = 16$. Rechts der entsprechende Hook $H_\lambda(2,2)$ mit einer Hook-Length von $H_\lambda(2,2) = 5$.

Für ein quadratisches Gitter der Seitenlänge 1, 2 oder 3 ist bekannt, für welche konkreten Bewertungen die geringsten, bzw. die meisten möglichen Sortierungen im Gitter existieren. So gibt es für $n \in \{1,2,3\}$ jeweils Bewertungen, die eine eindeutige Sortierung haben. Ab $n \geq 4$ gilt dies nicht mehr. Es wird vermutet, dass die Bewertung $(1,1),\ldots,(n^2,n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die meisten Sortierungen besitzt. Für $n \in \{1,2,3\}$ ist das bekannt, ab $n \geq 4$ ist die Frage jedoch offen.

Alternative Lösung:

Wer mit der Hook-Length Formel nicht vertraut ist, kann die Anzahlen auch zu Fuß ermitteln. Wir gehen wieder davon aus, dass die Pakete bereits auf die Bewertungen (1,1), . . . ,(9,9) transformiert wurden. Wir können also jedes Paket durch nur eine Zahl beschreiben. Und dabei gilt es, diese in das 3×3 - Raster einzupassen, sodass links von jedem Kästchen und darunter nur kleinere Zahlen sind. Zur besseren Vorstellung drehen wir das Quadrat um 45° auf die linke untere Ecke und lassen die Geschenke wie unter dem Einfluss der Schwerkraft in das 3×3 - Raster fallen. Das erste Päckchen kann sich dabei nur ganz unten festsetzen, denn links darunter oder rechts darunter darf kein weiteres Paket sein. Nach und nach lassen wir die weiteren Pakete $2, \ldots ,9$ hineinfallen. Diese können sich in unterschiedlichen Positionen festsetzen. Wichtig ist, dass es jeweils eine Art „Kerbe“ ist, die entweder aus vorherigen Paketen oder dem Rand gebildet wird. Damit wird jeweils sichergestellt, dass sich links darunter oder rechts darunter nur Pakete mit kleinerer Nummer befinden.

In dem folgenden Diagramm sind die möglichen Belegungsmuster dargestellt und durch Pfeile angedeutet, wie man von einem Muster zum anderen gelangt. Manchmal gibt es mehrere Wege zu einem Muster und darum ist neben jedem Muster die Anzahl der Wege angegeben, wie man dorthin gelangt. Ganz unten ergibt sich dann als Anzahl für die Belegung des kompletten Quadrats die Lösung 42.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
x1
x1
x1
x1
x2
x1
x3
x2
x3
x5
x6
x5
x5
x16
x5
x21
x21
x42
x42